

Introducción a la dinámica de sistemas multicuerpo

Seminario: “Introducción a la dinámica de sistemas multicuerpo y aplicaciones en biomecánica”

Curso de Biomecánica del Master en Ingeniería Biomédica de la UPC

Javier Cuadrado Aranda

Barcelona, 27 de noviembre de 2009

LIM



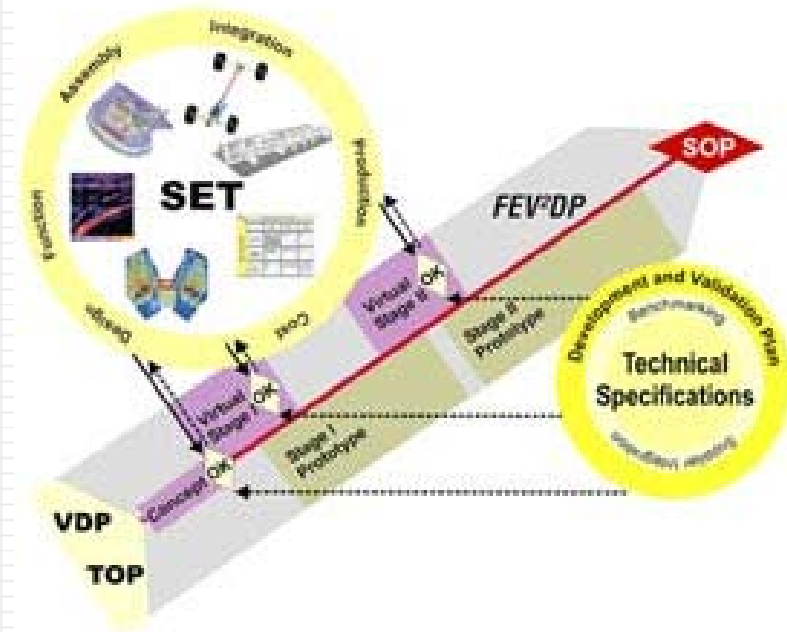
Laboratorio de Ingeniería Mecánica
Universidad de La Coruña

<http://lim.ii.udc.es>



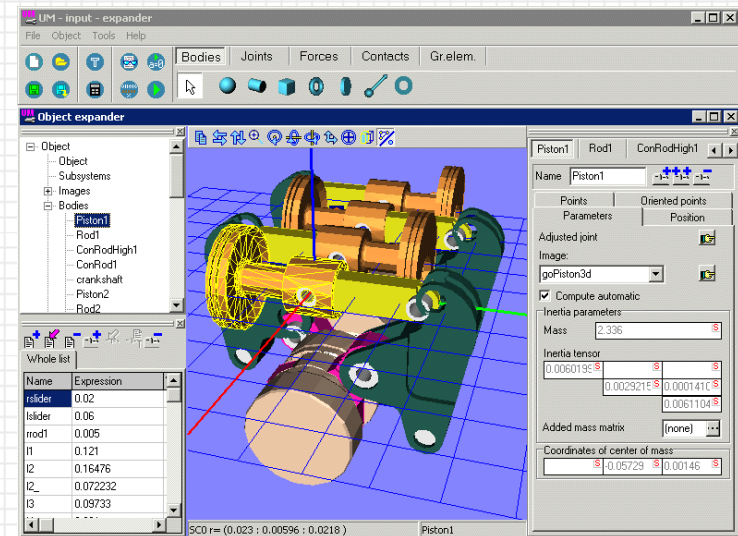
Desarrollo virtual de producto

- Sistema multicuerpo: sistema mecánico móvil o con partes móviles.
- Dinámica multicuerpo:
 - Simulación por ordenador de la dinámica de sistemas multicuerpo.
 - Forma parte del concepto de desarrollo virtual de producto (*virtual product development*).
- Ventajas:
 - Anticipación del comportamiento del sistema en las primeras fases del ciclo de diseño.
 - Reducción de prototipos físicos y ensayos experimentales.
 - Consecuencias: mayor calidad, menor coste, antes en el mercado.

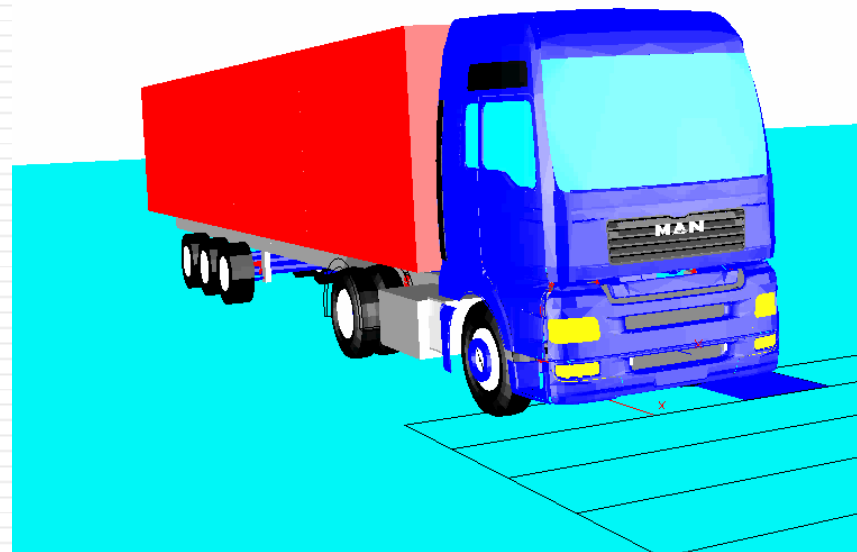
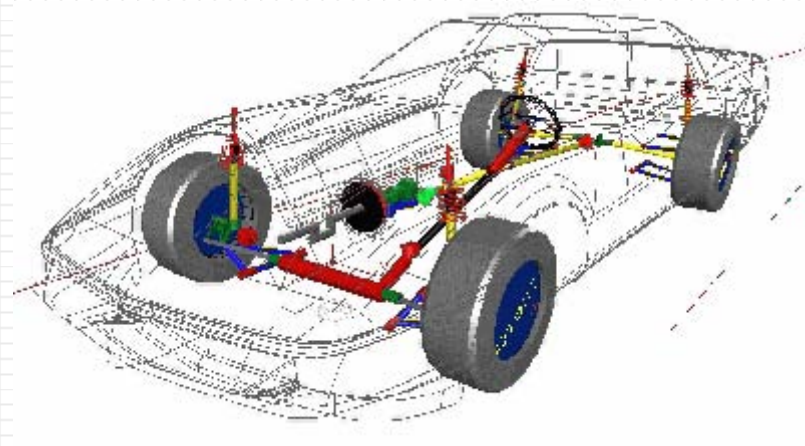


Dinámica multicuerpo (Multibody dynamics)

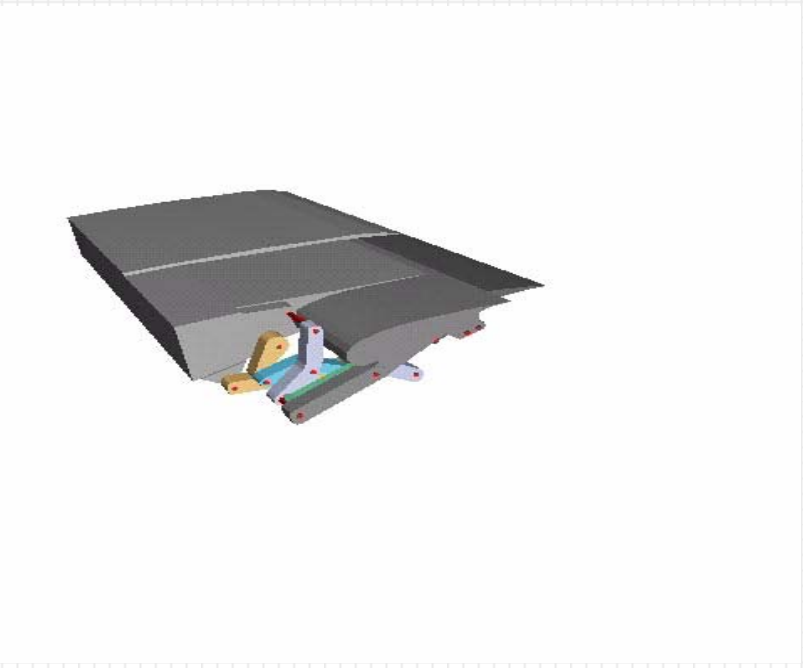
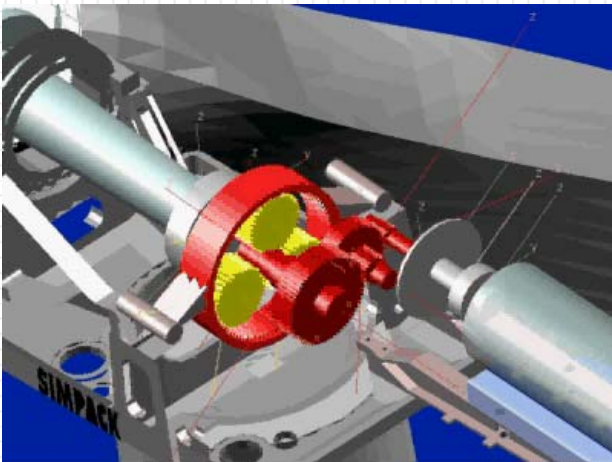
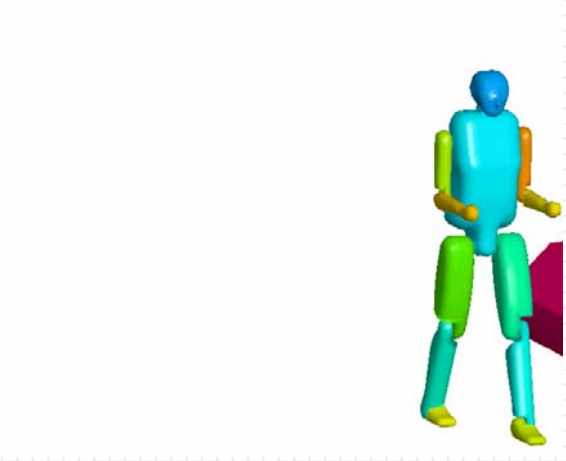
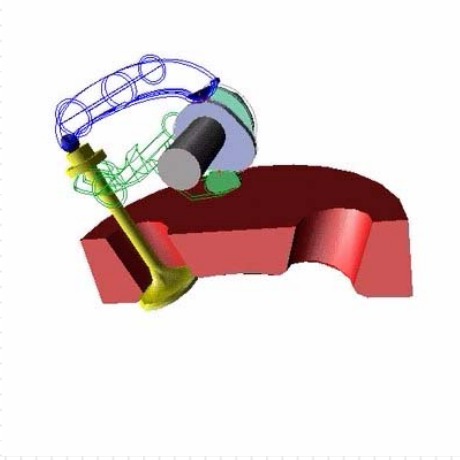
- Mecánica computacional de máquinas y mecanismos: mecánica + métodos matemáticos + programación.
- Permite resolver en el ordenador la dinámica directa (y la cinemática, y la dinámica inversa) de modelos de vehículos, máquinas y mecanismos tan detallados como se desee.
- Sectores industriales de aplicación:
 - Automoción, Aeroespacial, Ferroviario, Naval, Maquinaria pesada, Máquina-herramienta, Robótica, Biomecánica, Médico, Deportivo, Entretenimiento, etc.
- Aplicación en todas las fases del ciclo de diseño:
 - Diseño, Simulación, Análisis, Control, Ensayo, Fabricación y Mantenimiento.



Ejemplos



Ejemplos



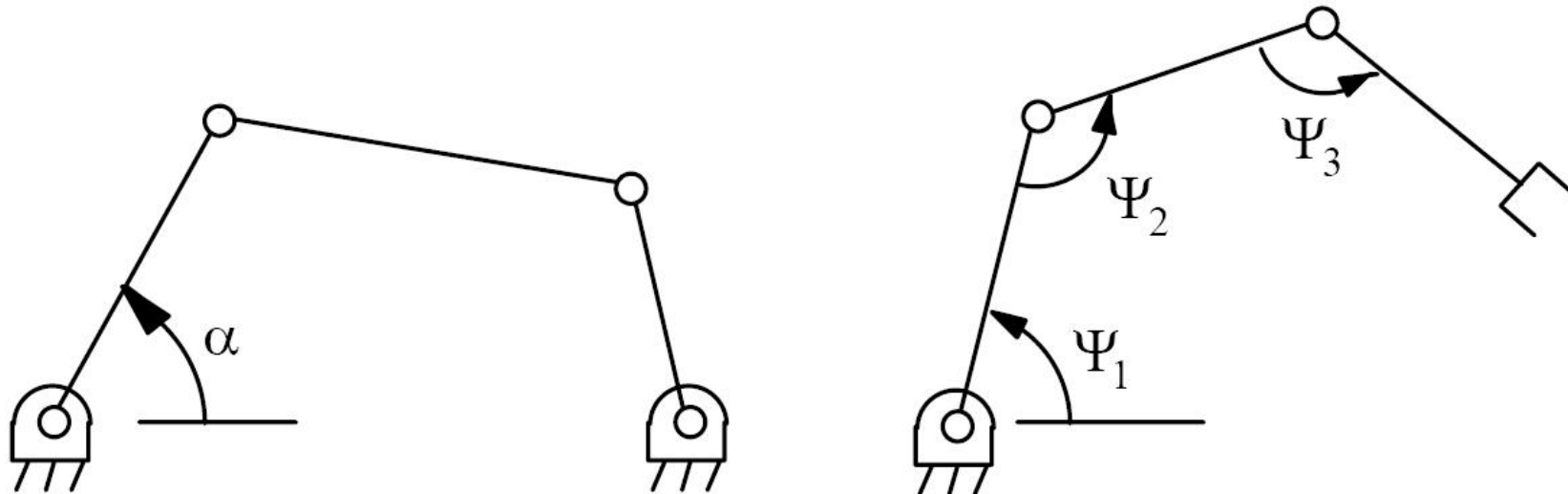
Fases del problema

- Fases del problema de dinámica multicuerpo:
 - Modelado físico: simplificaciones, teorías para flexibilidad, contacto, etc.
 - Selección de coordenadas.
 - Formulación de ecuaciones del movimiento: cinemática y dinámica.
 - Integración numérica.
 - Implementación: Fortran, C++, Matlab.
- Cuestiones básicas:
 - Modelado.
 - Cinemática.
 - Dinámica.



Modelado: método tradicional

- Tradicionalmente, en Mecánica clásica se modelan los mecanismos mediante coordenadas mínimas.
- Coordenadas mínimas: tantas como grados de libertad del sistema (independientes).
- Problemas en cadenas cerradas.



Modelado: método computacional

- Coordenadas dependientes: más que grados de libertad del sistema.
- Relacionadas por ecuaciones de restricción.

n: número de coordenadas

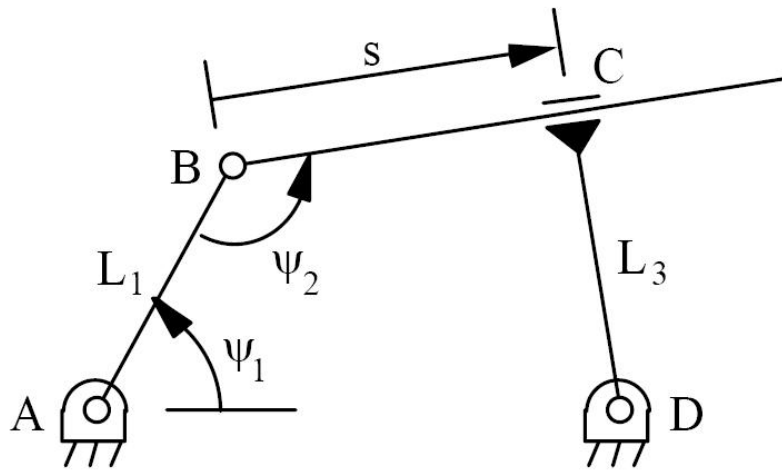
g: número de grados de libertad del sistema

m: número de ecuaciones de restricción

$$m=n-g$$

- Tres familias: relativas, punto de referencia, naturales.

Modelado: relativas

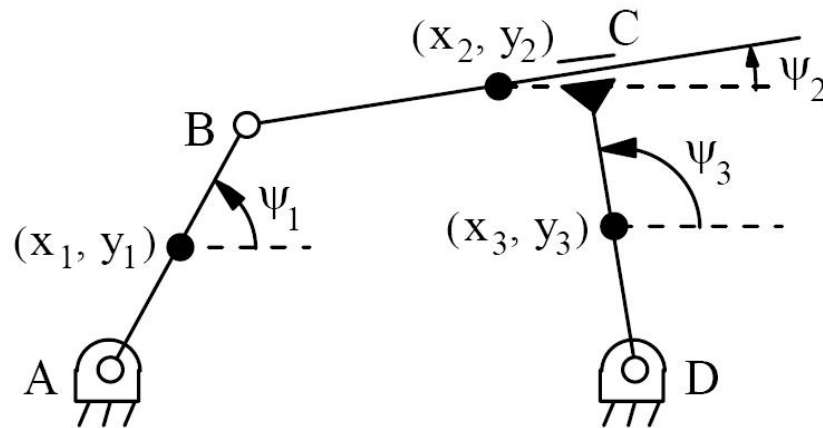


$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CD} - \mathbf{AD} = \mathbf{0}$$

$$L_1 \cos \psi_1 + s \cos(\psi_1 + \psi_2 - \pi) + L_3 \sin(\psi_1 + \psi_2 - \pi) - L_4 = 0$$

$$L_1 \sin \psi_1 + s \sin(\psi_1 + \psi_2 - \pi) - L_3 \cos(\psi_1 + \psi_2 - \pi) - L_4 = 0$$

Modelado: punto de referencia



$$(x_1 - x_A) - \frac{L_1}{2} \cos \psi_1 = 0$$

$$(y_1 - y_A) - \frac{L_1}{2} \sin \psi_1 = 0$$

$$(x_1 + \frac{L_1}{2} \cos \psi_1) - (x_2 - \frac{L_2}{2} \cos \psi_2) = 0$$

$$(y_1 + \frac{L_1}{2} \sin \psi_1) - (y_2 - \frac{L_2}{2} \sin \psi_2) = 0$$

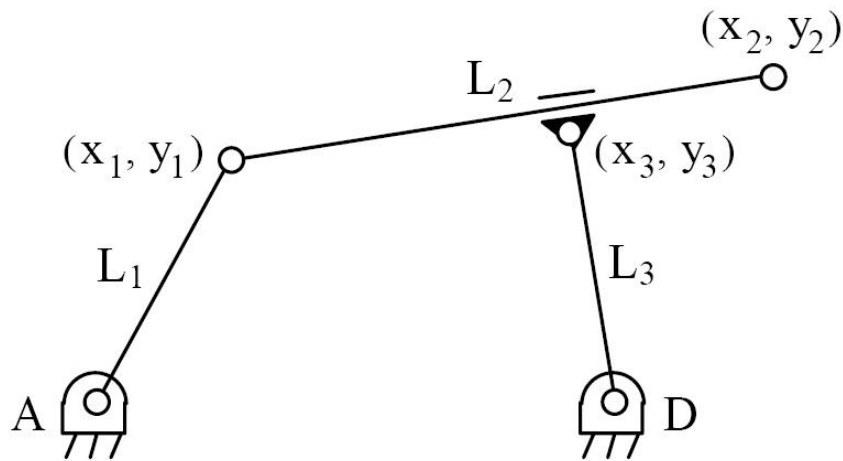
$$\psi_3 - (\psi_2 + \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$(x_2 - x_3) \cos \psi_3 + (y_2 - y_3) \sin \psi_3 - \frac{L_3}{2} = 0$$

$$(x_3 - x_D) - \frac{L_3}{2} \cos \psi_3 = 0$$

$$(y_3 - y_D) - \frac{L_3}{2} \sin \psi_3 = 0$$

Modelado: naturales



$$(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 - L_1^2 = 0$$

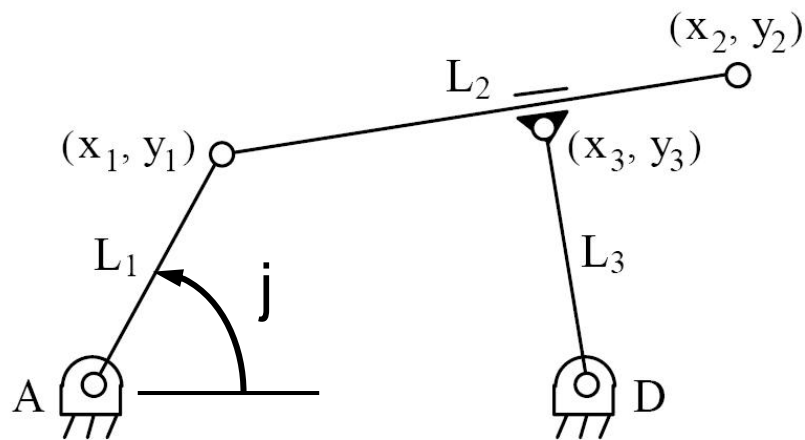
$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_2^2 = 0$$

$$(x_3 - x_D)^2 + (y_3 - y_D)^2 - L_3^2 = 0$$

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_D) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_D) = 0$$

$$(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1) = 0$$

Modelado: mixtas (naturales + relativas)



$$(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 - L_1^2 = 0$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_2^2 = 0$$

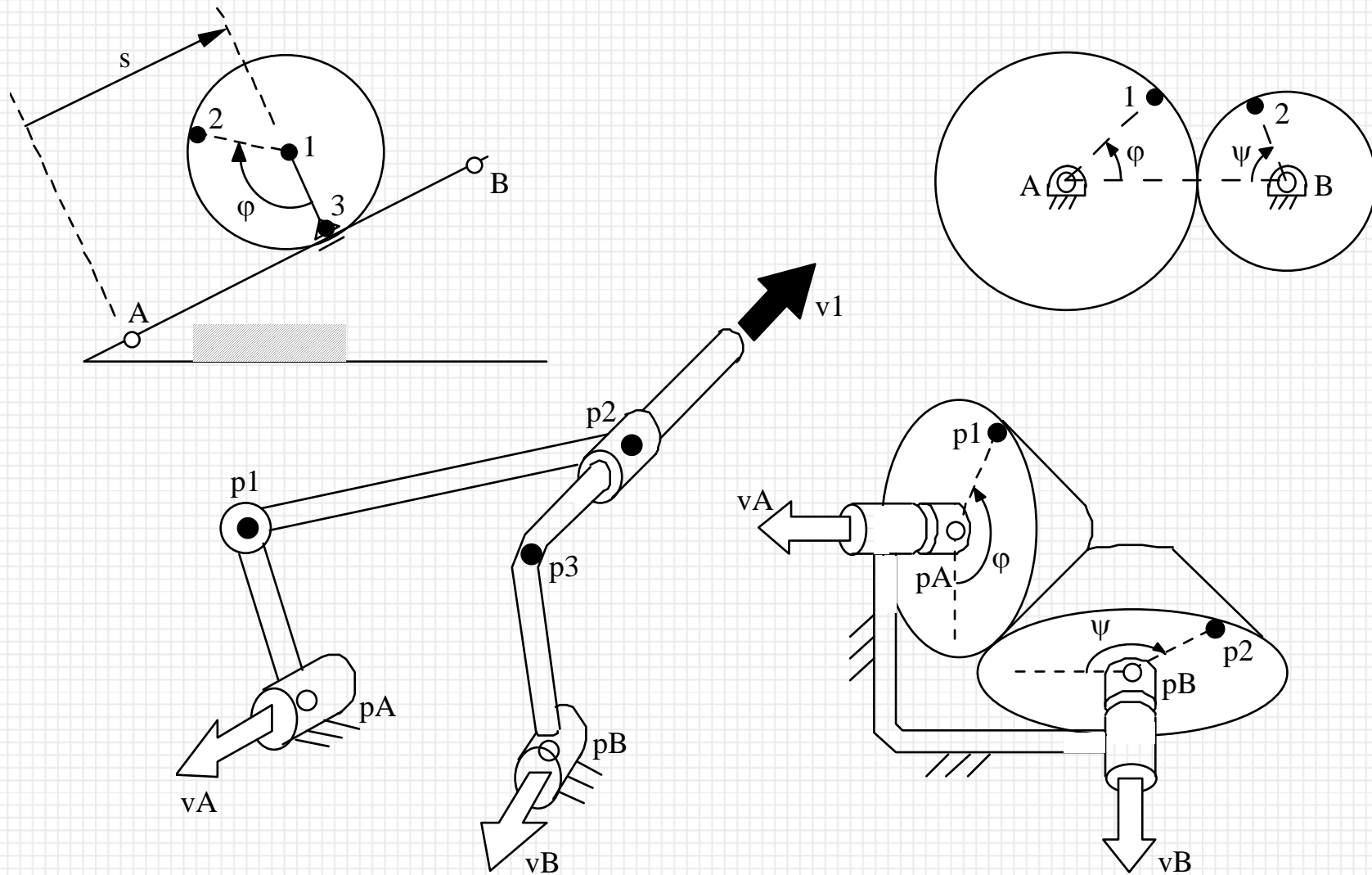
$$(x_3 - x_D)^2 + (y_3 - y_D)^2 - L_3^2 = 0$$

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_D) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_D) = 0$$

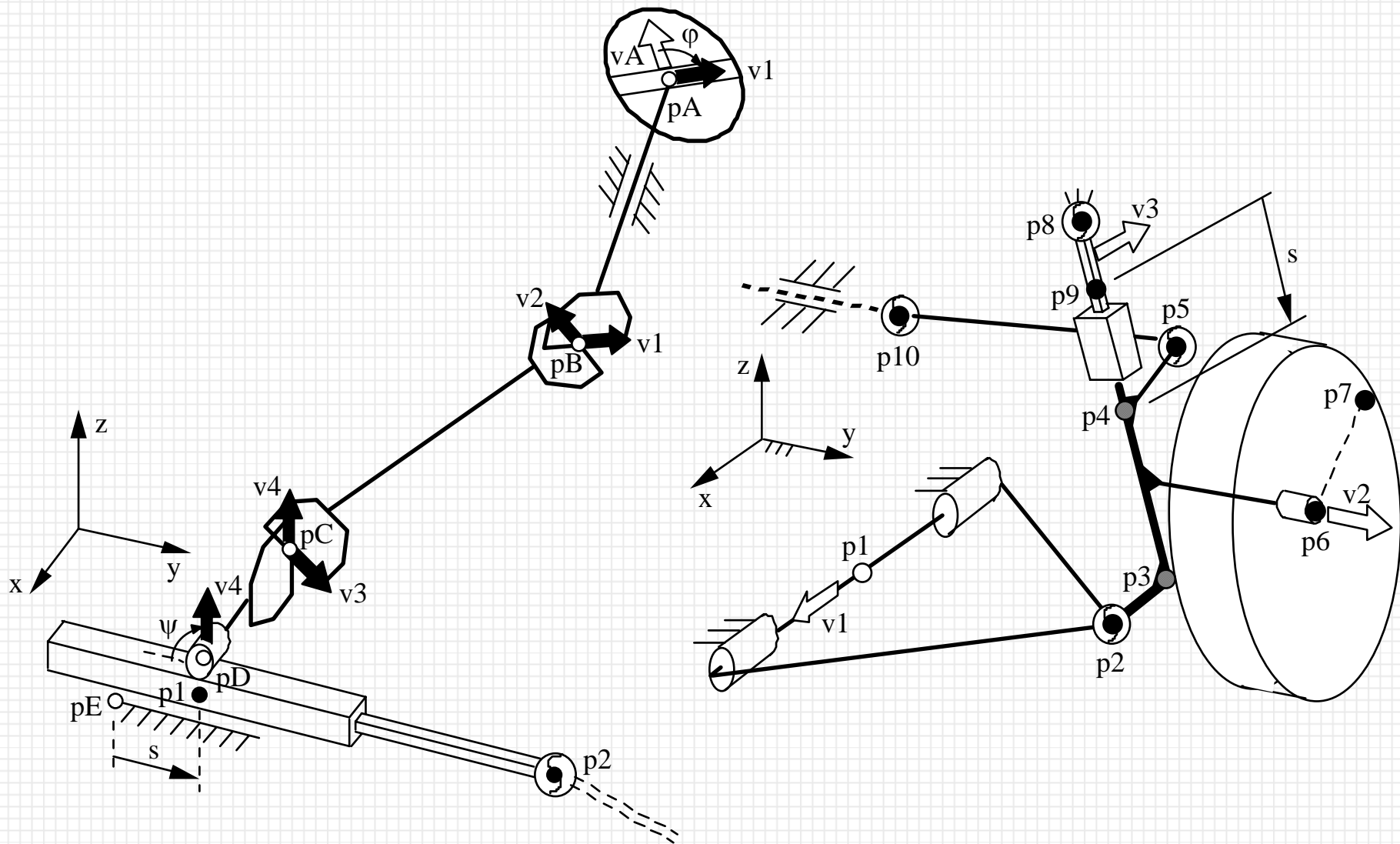
$$(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1) = 0$$

$$(x_1 - x_A)(x_D - x_A) + (y_1 - y_A)(y_D - y_A) - L_1 L_4 \cos \varphi = 0$$

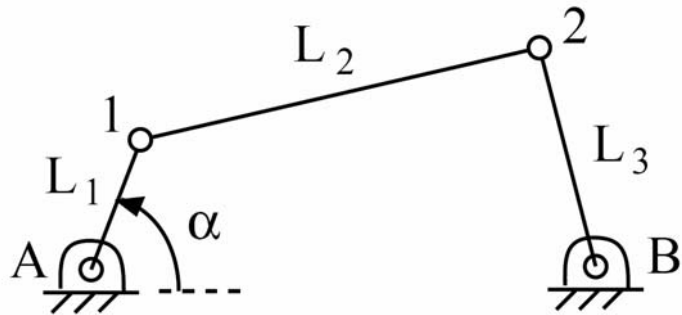
Modelado: ejemplos



Modelado: ejemplos



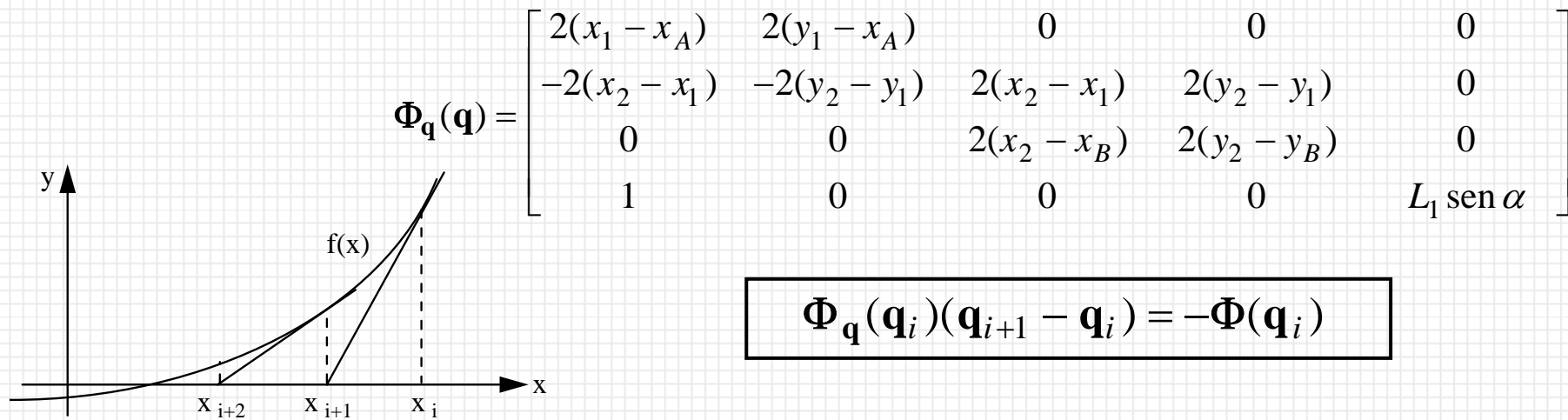
Cinemática: problema de posición



$$\mathbf{q}^t = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha\}$$

$$\left. \begin{aligned} (x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 - L_1^2 &= 0 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_2^2 &= 0 \\ (x_2 - x_B)^2 + (y_2 - y_B)^2 - L_3^2 &= 0 \\ (x_1 - x_A) - L_1 \cos \alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \Phi(\mathbf{q}) = 0$$

$$\Phi(\mathbf{q}) \cong \Phi(\mathbf{q}_0) + \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) = 0 \implies \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) = -\Phi(\mathbf{q}_0)$$

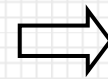


$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_i)(\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i) = -\Phi(\mathbf{q}_i)$$

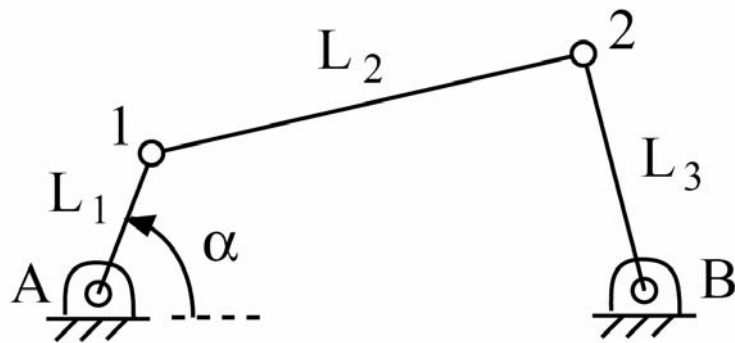
Cinemática: problema de velocidad y aceleración

$$\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$



$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = -\dot{\Phi}_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}$$



$$-\dot{\Phi}_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} 2(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) \\ 2[(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2] \\ 2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ L_1\dot{\alpha}^2 \cos \alpha \end{Bmatrix}$$

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - x_A) & 2(y_1 - x_A) & 0 & 0 & 0 \\ -2(x_2 - x_1) & -2(y_2 - y_1) & 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) & 0 \\ 0 & 0 & 2(x_2 - x_B) & 2(y_2 - y_B) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & L_1 \sin \alpha \end{bmatrix}$$

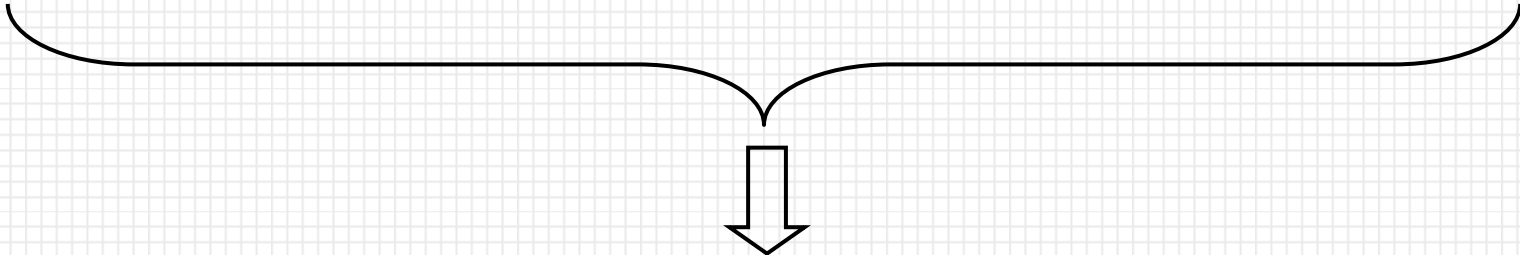
Dinámica: ecuaciones del movimiento

Ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^t \lambda = \mathbf{Q}$$

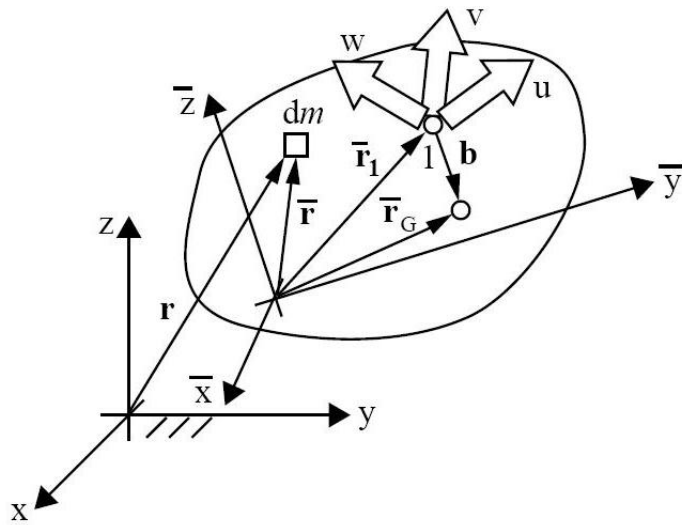
Energía cinética

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}$$


$$\begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^t \lambda &= \mathbf{Q} \\ \Phi &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones
diferenciales-algebraicas (DAE)

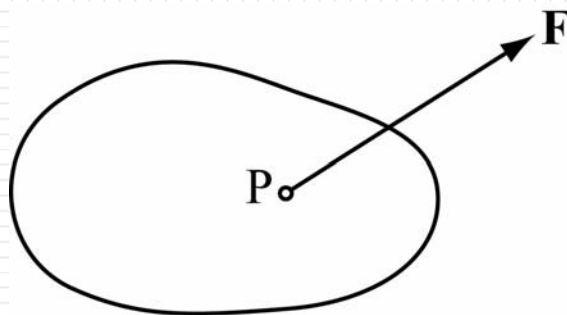
Dinámica: matriz de masas y vector de fuerzas



$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & m(\bar{\mathbf{r}}_G - \bar{\mathbf{r}}_1)^t \bar{\mathbf{X}}^{-T} \\ m\bar{\mathbf{X}}^{-1}(\bar{\mathbf{r}}_G - \bar{\mathbf{r}}_1) & \bar{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{\Pi}_G + m(\bar{\mathbf{r}}_G - \bar{\mathbf{r}}_1)(\bar{\mathbf{r}}_G - \bar{\mathbf{r}}_1)^t)\bar{\mathbf{X}}^{-T} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{X}} = [\bar{\mathbf{u}} \quad \bar{\mathbf{v}} \quad \bar{\mathbf{w}}]$$

$$\mathbf{\Pi}_G = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-I_x + I_y + I_z) & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & \frac{1}{2}(I_x - I_y + I_z) & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{1}{2}(I_x + I_y - I_z) \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}_P^T \mathbf{F}$$

$$\mathbf{r}_P = [\mathbf{I} \quad c_1 \mathbf{I} \quad c_2 \mathbf{I} \quad c_3 \mathbf{I}] \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_P \mathbf{q}$$

Dinámica: Lagrange estabilizado

Se trata de resolver
las DAE

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^t \lambda &= \mathbf{Q} \\ \Phi &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Opción: pasar a ODE

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^t \lambda = \mathbf{Q} \\ \ddot{\Phi} = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_{\mathbf{q}}^T \\ \Phi_{\mathbf{q}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q} \\ -\dot{\Phi}_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix}$$

Inestable

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^t \lambda = \mathbf{Q} \\ \ddot{\Phi} + 2\xi\omega\dot{\Phi} + \omega^2\Phi = \mathbf{0} \end{cases}$$

Estable

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_{\mathbf{q}}^T \\ \Phi_{\mathbf{q}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q} \\ -\dot{\Phi}_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - 2\xi\omega\dot{\Phi} - \omega^2\Phi \end{Bmatrix}$$

Dinámica: matriz R

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^t \lambda = \mathbf{Q}$$
$$\Phi = \mathbf{0}$$

Paso a coordenadas independientes

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{z}} \\ \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_1 \\ \dots \\ \dot{q}_i \\ \dots \\ \dot{q}_n \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} R_{11} & \dots & R_{1i} & \dots & R_{1f} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{i1} & \dots & R_{ii} & \dots & R_{if} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & \dots & R_{ni} & \dots & R_{nf} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{array} \right.$$

$$\mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R} \ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{R}^T (\mathbf{Q} - \mathbf{M} \dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{z}})$$

$$\bar{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{Q}}$$

Dinámica: penalizadores

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Phi}_q^t \lambda = \mathbf{Q}$$

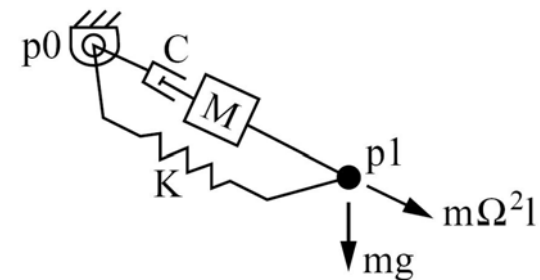
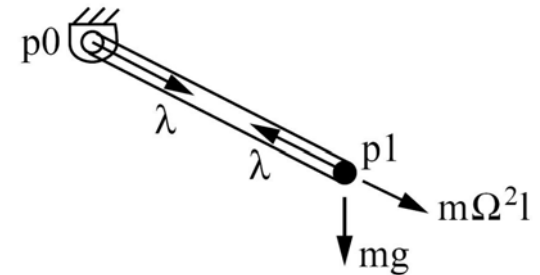
$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{0}$$

Aproximación
de los
multiplicadores

$$\lambda = \alpha (\ddot{\mathbf{\Phi}} + 2\xi\omega\dot{\mathbf{\Phi}} + \omega^2\mathbf{\Phi})$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Phi}_q^T \alpha (\ddot{\mathbf{\Phi}} + 2\xi\omega\dot{\mathbf{\Phi}} + \omega^2\mathbf{\Phi}) = \mathbf{Q}$$

$$(\mathbf{M} + \alpha \mathbf{\Phi}_q^T \mathbf{\Phi}_q) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} - \alpha \mathbf{\Phi}_q^T (\dot{\mathbf{\Phi}}_q \dot{\mathbf{q}} + 2\xi\omega\dot{\mathbf{\Phi}} + \omega^2\mathbf{\Phi})$$



Dinámica: integración numérica

- Se ha visto que las DAE se pasan a ODE.
- Existen gran cantidad de integradores disponibles para ODE de primer orden de la forma:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$$

- Como nuestro problema es de segundo orden, hay que duplicar variables para usar esos integradores:

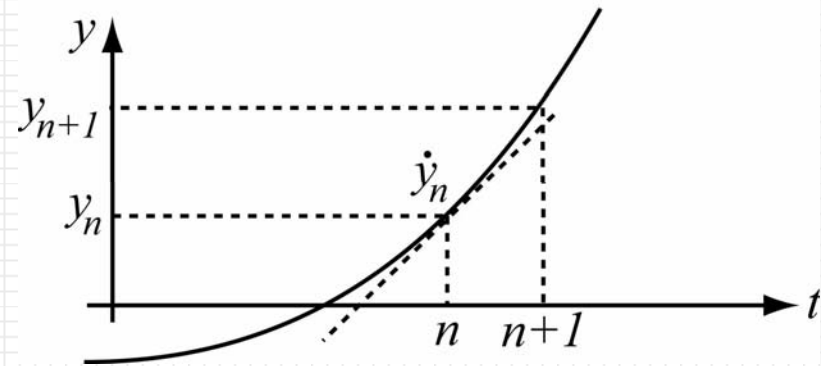
$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathbf{y}} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix}$$

- Propiedades de los integradores: estabilidad y precisión.
- Problemas *stiff*.

Dinámica: integración numérica

■ Clasificación de los integradores:

- Paso simple (*single step*) vs paso múltiple (*multistep*).
- Paso fijo vs paso variable.
- Explícitos vs implícitos (iteración: punto fijo vs Newton-Raphson).



Euler explícito $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \dot{\mathbf{y}}_n \Delta t$

**Runge-Kutta
explícito de 2º orden**

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{2} (\dot{\mathbf{y}}_1 + \dot{\mathbf{y}}_2)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n + \dot{\mathbf{y}}_1 \Delta t, t + \Delta t)$$

Regla trapezoidal

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{2} (\dot{\mathbf{y}}_n + \dot{\mathbf{y}}_{n+1})$$

Adams-Bashforth / Adams-Moulton

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{24} (55\dot{\mathbf{y}}_n - 59\dot{\mathbf{y}}_{n-1} + 37\dot{\mathbf{y}}_{n-2} - 9\dot{\mathbf{y}}_{n-3})$$

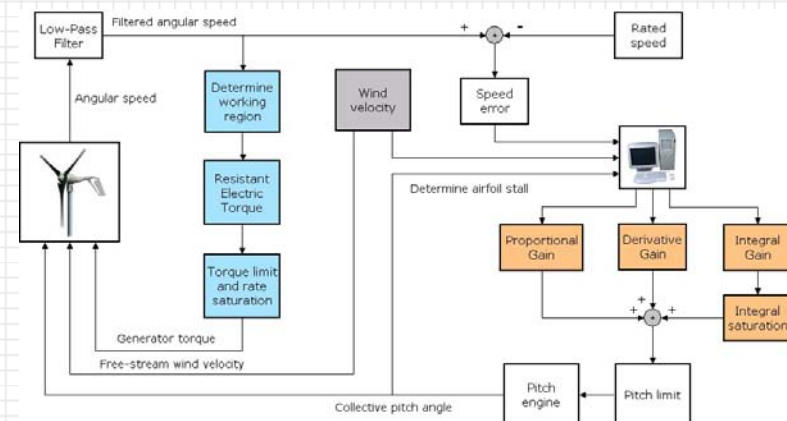
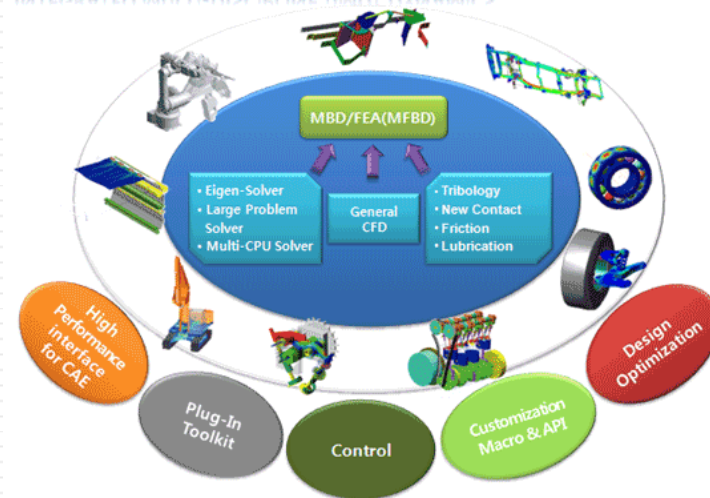
$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{24} (9\dot{\mathbf{y}}_{n+1} + 19\dot{\mathbf{y}}_n - 5\dot{\mathbf{y}}_{n-1} + \dot{\mathbf{y}}_{n-2})$$

Aplicaciones industriales

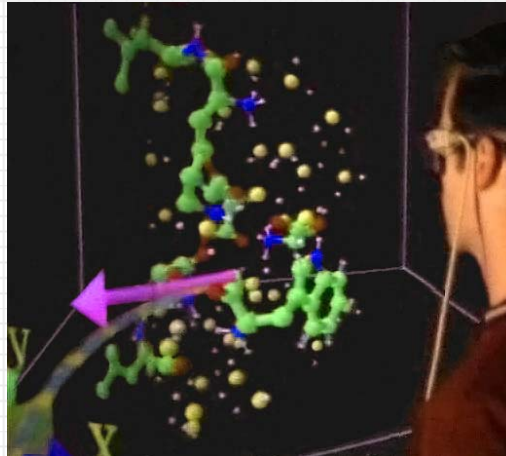
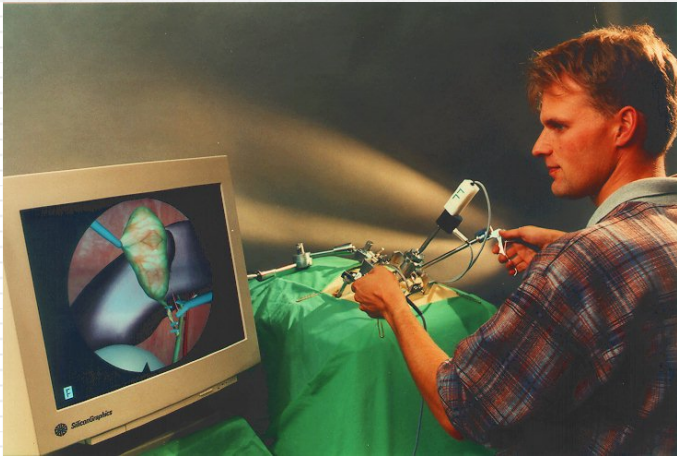
- Las diferentes fases del problema deben ser consideradas de manera conjunta:
 - modelado físico
 - selección de coordenadas
 - formulación de ecuaciones del movimiento
 - integración numérica
 - implementación

- El desafío es mayor cuanto mayor detalle se requiere en el modelo:
 - flexibilidad
 - contacto
 - control
 - multifísica

INTEGRATED MULTI-DISCIPLINE (IMD) DYNAMICS



Aplicaciones industriales



Investigación en el LIM

■ Teórica.

- Métodos eficientes para la dinámica de sistemas multicuerpo.
 - Aspectos: modelizado físico, selección de coordenadas, ecuaciones del movimiento, integración numérica, implementación.
 - Fenómenos: flexibilidad, contacto, multifísica (hidráulica, electricidad, etc.).
 - Complementos: control, optimización.

■ Aplicada.

- *Simuladores: automóvil, excavadora.*
- Control de automóviles.
- RV en operaciones de montaje y desmontaje.
- Diseño de ortesis para ayuda a la marcha de discapacitados.
- Simulación de redes y aparejos de pesca.

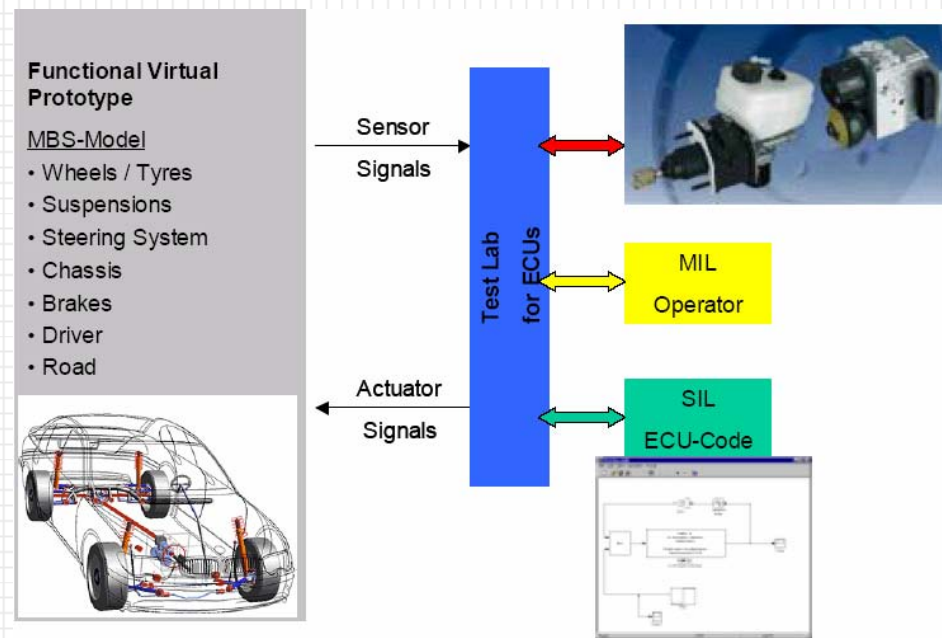
Simulación en tiempo real

- El movimiento del sistema multicuerpo es simulado por el ordenador en el mismo tiempo en que se produciría en la realidad.
- Necesario en simulaciones con:

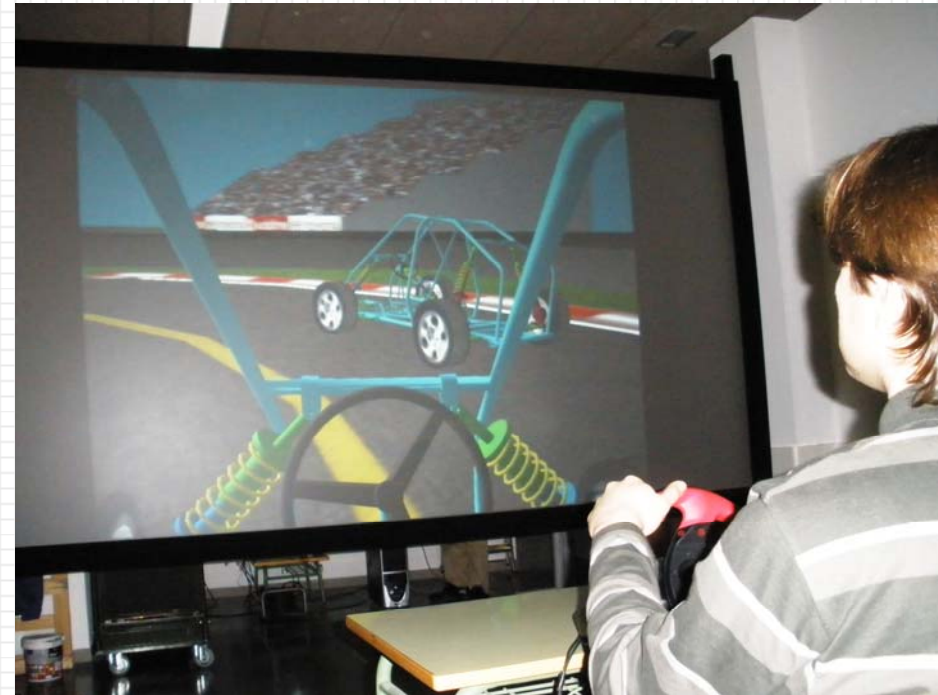
Human-in-the-loop



Hardware-in-the-loop



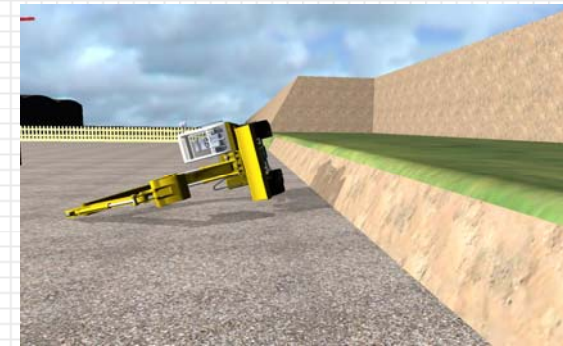
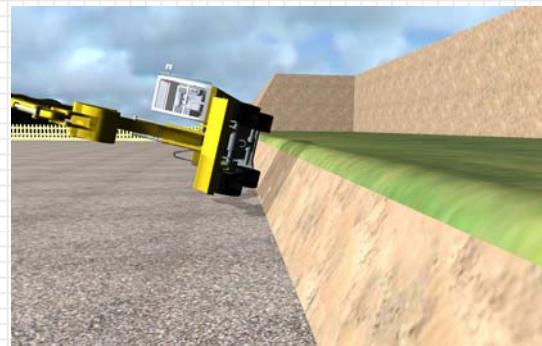
Simuladores: automóvil



Simuladores: excavadora

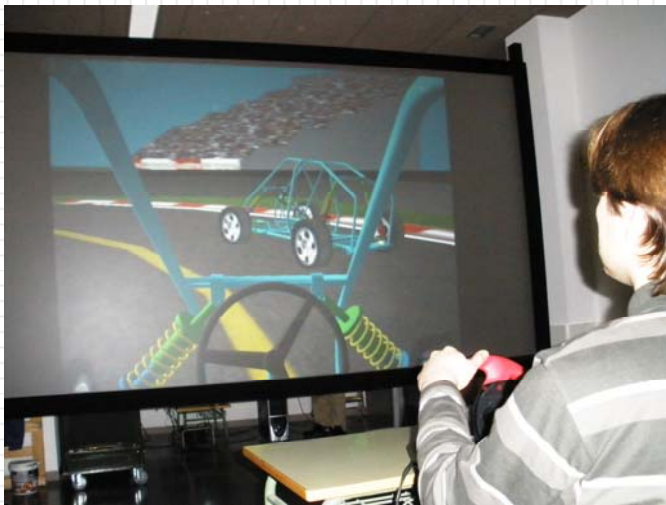


Simuladores: excavadora



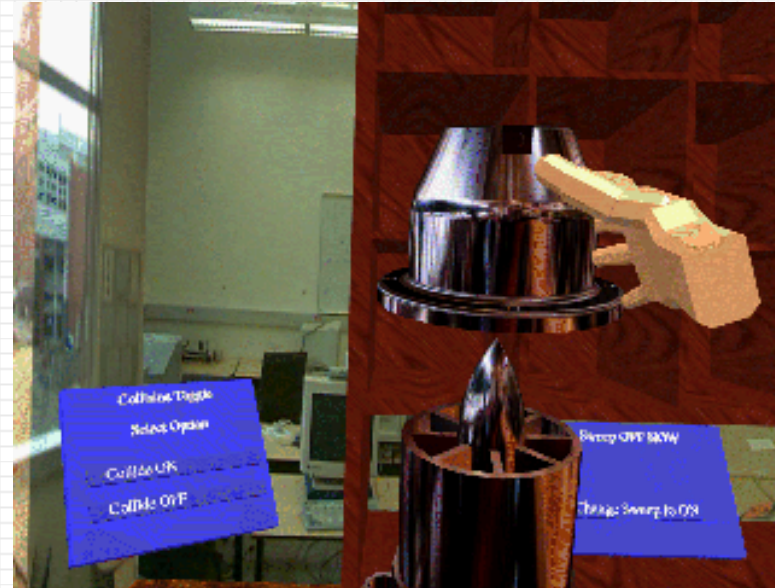
Control de automóviles

- Validación directa e inversa de modelo.
 - Sensorización y actuación de prototipo.
 - Steering-by-wire.
- Modelo como observador de estados (sensor virtual).
- Desarrollo de controladores.



RV en operaciones de montaje y desmontaje

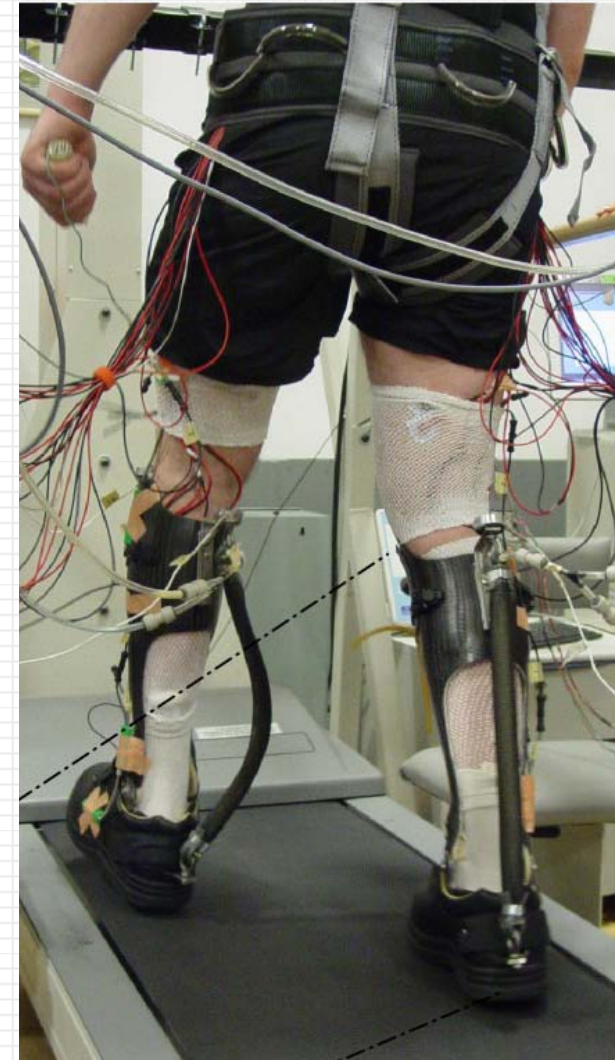
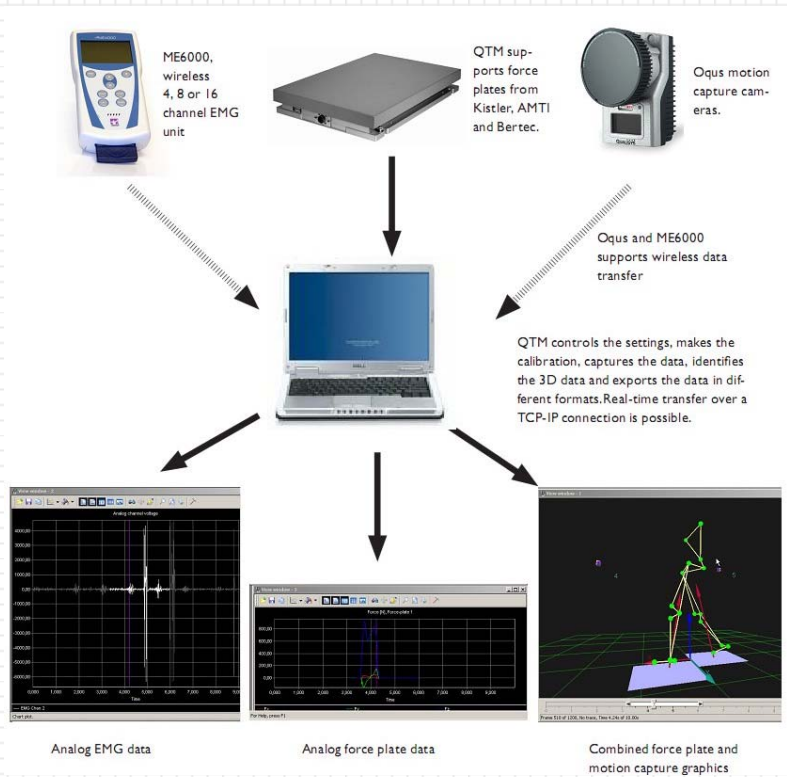
- Modelos de piezas y herramientas importados desde el CAD.
- Simulación en tiempo real con gravedad, impactos, etc.
- Interface: captura óptica del movimiento y HMD o pantalla estereoscópica.



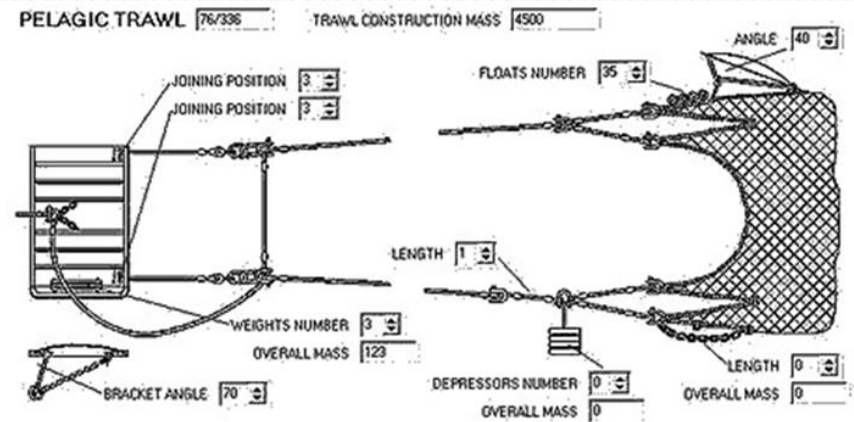
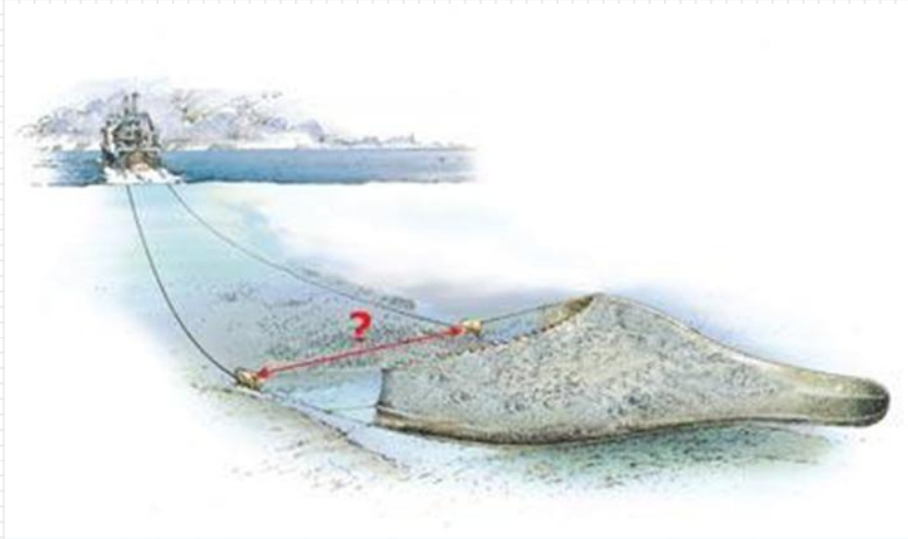
Diseño de ortesis para ayuda a la marcha de discapacitados

SW para probar ortesis sobre el paciente de manera virtual.

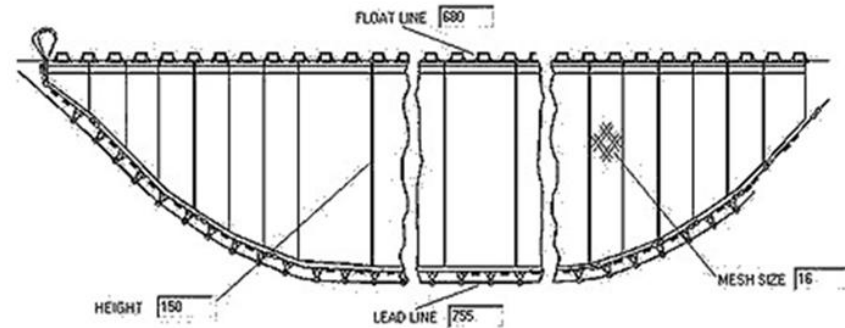
Dinámica directa: optimización.



Simulación de redes y aparejos de pesca



PURSE SEINE [690/175]



- Modelos de gran tamaño.
- Fuerzas de interacción con el agua.
- Contacto con el fondo marino.